1.6.10 Mocniny - shrnutí

Předpoklady: 010609

Důležité znalosti

- $a^3 = a \cdot a \cdot a$.
- $a^{-3} = \dfrac{1}{a \cdot a \cdot a}$.
- vzorce pro násobení a dělení: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.
- vzorec pro mocninu mocniny: $\left(a^r\right)^s = a^{rs}$.
- vzorce pro odstranění závorek: $\left(a \cdot b\right)^r = a^r \cdot b^r$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$.
- $\left(-2\right)^2 = \left(-2\right) \cdot \left(-2\right) = 2^2$, $-2^2 = -\left(2^2\right) = -4$.
- Sudý mocnitel $\Rightarrow$ nezáporný výsledek.
- Neznámá v mocniteli nic nemění na způsobu, kterým upravujeme.

Zádrhele

- Nesmíme používat vzorce pro různé základy.
- Mocnina (stejně jako odmocnina) nemůže trhat závorky s + a - $\left(a+b\right)^r \neq a^r + b^r$
- $x : \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-3} = x \cdot \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-3} = x \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^3 = x : \left(\dfrac{b}{a}\right)^3$ - nedělat dvě věci najednou
- Mínus v exponentu neovlivňuje znaménko (jen říká, že dělím místo násobení)

Dobré rady

- Všechny vzorce se dají snadno odvodit z významu mocniny.
- Při nejasnostech se dá rozhodnout podle významu mocniny.
- Dodržovat KISS (zjednodušovat závorky před umocněním, ...)

Př. 1: Vypočti.

a) $\left(-1\right)^{123}$ b) $0^{52525252}$ c) $2^2 \cdot 2^6$ d) $\dfrac{3^{2k-3}}{3^{2-k}}$

a) $\left(-1\right)^{123} = -1$

b) $0^{52525252} = 0$

c) $2^2 \cdot 2^6 = 2^{2+6} = 2^8$

d) $\dfrac{3^{2k-3}}{3^{2-k}} = 3^{2k-3-(2-k)} = 3^{3k-5}$

Př. 2: Zjednoduš.

a) $\left(\frac{a^2 \cdot b}{c^{-3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{-2}}{b^3 c^{-3}}\right)^3$ b) $\frac{\left(4^2 \cdot 15^3\right)^{-2}}{12^3 \cdot 6^{-10}}$

a) $\left(\frac{a^2 \cdot b}{c^{-3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{-2}}{b^3 c^{-3}}\right)^3 = \frac{a^4 \cdot b^2}{c^{-6}} \cdot \frac{a^{-6}}{b^9 c^{-9}} = \frac{a^{4-6} \cdot b^{2-9}}{c^{-6-9}} = a^{-2} \cdot b^{-7} \cdot c^{15}$

b) $\frac{\left(4^2 \cdot 15^3\right)^{-2}}{12^3 \cdot 6^{-10}} = \frac{4^{-4} \cdot 15^{-6}}{12^3 \cdot 6^{-10}} = \frac{\left(2^2\right)^{-4} \cdot (3 \cdot 5)^{-6}}{\left(2^2 \cdot 3\right)^3 \cdot (2 \cdot 3)^{-10}} = \frac{2^{-8} \cdot 3^{-6} \cdot 5^{-6}}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^{-10} \cdot 3^{-10}} =$

$= 2^{-8-6-(-10)} \cdot 3^{-6-3-(-10)} \cdot 5^{-6} = 2^{-4} \cdot 3^1 \cdot 5^{-6}$

Př. 3: Napiš jako jednu mocninu.

a) $\frac{2^{n-1} \cdot 2^{2n-2}}{2^{2-n}}$ b) $\frac{(-2)^{2n+1}}{(-2)^{2n}} \cdot \left[(-2)^n\right]^2 : \frac{2^3}{2^{n+4}}$ c) $\frac{2^{n+2} \cdot 4^{2n+3}}{8^{n-1}}$

a) $\frac{2^{n-1} \cdot 2^{2n-2}}{2^{2-n}} = 2^{n-1+2n-2-(2-n)} = 2^{4n-5}$

b) $\frac{(-2)^{2n+1}}{(-2)^{2n}} \cdot \left[(-2)^n\right]^2 : \frac{2^3}{2^{n+4}} = (-2)^{2n+1-2n} \cdot (-2)^{2n} : 2^{3-n-4} = (-2)^1 \cdot (-2)^{2n} : 2^{-n-1} =$

$= (-2)^{2n+1} : 2^{-n-1} = -2^{2n+1} : 2^{-n-1} = -2^{2n+1-(-n-1)} = -2^{3n+2}$

c) $\frac{2^{n+2} \cdot 4^{2n+3}}{8^{n-1}} = \frac{2^{n+2} \cdot \left(2^2\right)^{2n+3}}{\left(2^3\right)^{n-1}} = \frac{2^{n+2} \cdot 2^{4n+6}}{2^{3n-3}} = 2^{n+2+4n+6-(3n-3)} = 2^{2n+11}$

Př. 4: Dokaž platnost vzorců $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ a $\left(a^r\right)^s = a^{rs}$.

$a^r \cdot a^s = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots . a}_{r-\text{krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots . a}_{s-\text{krát}}}_{(r+s)-\text{krát} \Rightarrow a^{r+s}} = a^{r+s}$

$\frac{a^r}{a^s} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a}^{r-\text{krát}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{s-\text{krát}}} = \overbrace{a \cdot a \ldots a}^{(r-s)-\text{krát}} = a^{r-s}$

$\left(a^r\right)^s = \underbrace{a^r \cdot a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r}_{s-\text{krát}} = \underbrace{\overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}^{r-\text{krát}} \ldots \overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}^{r-\text{krát}} \ldots \overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}^{r-\text{krát}}}_{s-\text{krát}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(s \cdot r)-\text{krát}} = a^{r \cdot s}$

$(a \cdot b)^r = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \ldots . (a \cdot b)}_{r-\text{krát}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{r-\text{krát}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots b}_{r-\text{krát}} = a^r \cdot b^r$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \overbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}^{r-\text{krát}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{r-\text{krát}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{r-\text{krát}}} = \frac{a^r}{b^r}$$

Př. 5: Zjednoduš. Výsledek vyjádři pomocí kladných mocnin.

a) $\left(\frac{c^{-2}\cdot b^4}{a^{-3}}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{a^2}{b^{-4}c^{-3}}\right)^3 : \left(\frac{a^{-2}b^3}{b^{-1}c^4}\right)^{-2}$ b) $\frac{\left(25\cdot 8^2\cdot 12^3\right)^2}{\left(15^3\cdot 6^4\cdot 4^6\right)} : \left(\frac{2^3\cdot 10^4\cdot 9^3}{12^{-2}\cdot 6^6\cdot 25}\right)^{-2}$

a)

$$\left(\frac{c^{-2}\cdot b^4}{a^{-3}}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{a^2}{b^{-4}c^{-3}}\right)^3 : \left(\frac{a^{-2}b^3}{b^{-1}c^4}\right)^{-2} = \frac{c^6\cdot b^{-12}}{a^9}\cdot\frac{a^6}{b^{-12}c^{-9}}\cdot\left(\frac{a^{-2}b^3}{b^{-1}c^4}\right)^2 = c^{6-(-9)}\cdot a^{6-9}b^{-12-(-12)}\cdot\frac{a^{-4}b^6}{b^{-2}c^8} =$$

$$= c^{15}\cdot a^{-3}\cdot\frac{a^{-4}b^6}{b^{-2}c^8} = c^{15-8}\cdot a^{-3-4}\cdot b^{6-(-2)} = c^7\cdot a^{-7}\cdot b^8 = b^8\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^7$$

b)

$$\frac{\left(25\cdot 8^2\cdot 12^3\right)^2}{\left(15^3\cdot 6^4\cdot 4^6\right)} : \left(\frac{2^3\cdot 10^4\cdot 9^3}{12^{-2}\cdot 6^6\cdot 25}\right)^{-2} = \frac{\left(5^2\cdot\left[2^3\right]^2\cdot\left[2^2\cdot 3\right]^3\right)^2}{\left(5\cdot 3\right)^3\cdot\left(2\cdot 3\right)^4\cdot\left(2^2\right)^6} : \left(\frac{2^3\cdot\left[2\cdot 5\right]^4\cdot\left[3^2\right]^3}{\left[2^2\cdot 3\right]^{-2}\cdot\left[2\cdot 3\right]^6\cdot 5^2}\right)^{-2} =$$

$$= \frac{\left(5^2\cdot 2^6\cdot 2^6\cdot 3^3\right)^2}{5^3\cdot 3^3\cdot 2^4\cdot 3^4\cdot 2^{12}} : \left(\frac{2^3\cdot 2^4\cdot 5^4\cdot 3^6}{2^{-4}\cdot 3^{-2}\cdot 2^6\cdot 3^6\cdot 5^2}\right)^{-2} = \frac{5^4\cdot 2^{24}\cdot 3^6}{5^3\cdot 3^7\cdot 2^{16}} : \left(2^5\cdot 5^2\cdot 3^2\right)^{-2} =$$

$$= 5\cdot 2^8\cdot 3^{-1}\cdot\left(2^5\cdot 5^2\cdot 3^2\right)^2 = 5\cdot 2^8\cdot 3^{-1}\cdot 2^{10}\cdot 5^4\cdot 3^4 = 2^{28}\cdot 3^3\cdot 5^5$$

Př. 6: Vyjádři jako mocniny prvočísel. $\frac{\left(9^n\cdot 4^{2-n}\right)^2}{\left(12^{3n+1}\cdot 6^{n-2}\right)} : \left(\frac{2^3\cdot 8^{2+n}}{12^{-2n}\cdot 6^{n+2}}\right)^3$

$$\frac{\left(9^n\cdot 4^{2-n}\right)^2}{12^{3n+1}\cdot 6^{n-2}} : \left(\frac{2^3\cdot 8^{2+n}}{12^{-2n}\cdot 6^{n+2}}\right)^3 = \frac{\left(\left[3^2\right]^n\cdot\left[2^2\right]^{2-n}\right)^2}{\left(2^2\cdot 3\right)^{3n+1}\cdot\left(2\cdot 3\right)^{n-2}} : \left(\frac{2^3\cdot\left[2^3\right]^{2+n}}{\left[2^2\cdot 3\right]^{-2n}\cdot\left[2\cdot 3\right]^{n+2}}\right)^3 =$$

$$= \frac{\left(3^{2n}\cdot 2^{4-2n}\right)^2}{2^{6n+2}\cdot 3^{3n+1}\cdot 2^{n-2}\cdot 3^{n-2}} : \left(\frac{2^3\cdot 2^{3n+6}}{2^{-4n}\cdot 3^{-2n}\cdot 2^{n+2}\cdot 3^{n+2}}\right)^3 = \frac{3^{4n}\cdot 2^{8-4n}}{2^{7n}\cdot 3^{4n-1}} : \left(\frac{2^{3n+9}}{2^{-3n+2}\cdot 3^{-n+2}}\right)^3 =$$

$$= 3\cdot 2^{8-11n}\cdot\left(2^{6n+7}\cdot 3^{n-2}\right)^{-3} = 3\cdot 2^{8-11n}\cdot 2^{-18n-21}\cdot 3^{-3n+6} = 2^{-29n-13}\cdot 3^{-3n+7}$$

Shrnutí: $a^3 = a\cdot a\cdot a$ a $a^{-3} = \frac{1}{a\cdot a\cdot a}$, Z toho plyne všechno ostatní.